# LOGIKA MATEMATIKA

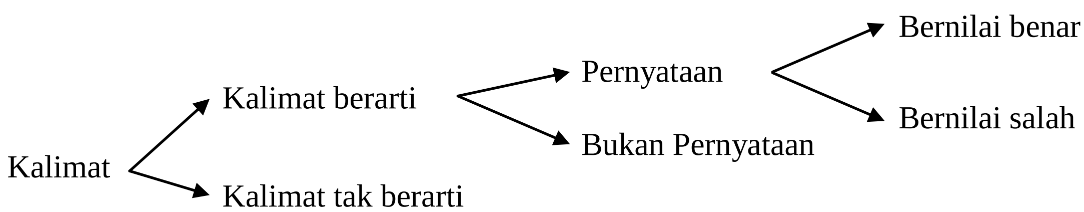
## 1 PERNYATAAN DAN BUKAN PERNYATAAN

### A Pengertian logika Matematika

*Logika* adalah ilmu untuk berpikir dan menalar dengan benar.
*Logika matematika* (logika simbolik) adalah ilmu tentang penyimpulan yang sah (absah), khususnya yang dikembangkan melalui penggunaan metode-metode matematika dan symbol-simbol matematika dengan tujuan menghindari makna ganda dari bahasa sehari-hari.

### B Pernyataan dan Bukan Pernyataan

Sebelum membahas tentang pernyataan, terlebih dahulu kita ingat pengertian kalimat. *Kalimat* adalah kumpulan kata yang disusun sesuai tata bahasa. *Kata* adalah rangkaian huruf yang mengandung arti. Jadi, *kalimat* adalah rangkaian kata yang disusun menurut aturan tata bahasa dan mengandung arti.




- ❖ Kalimat berarti adalah kalimat yang daripadanya dapat ditarik suatu pengertian yang masuk akal dan berarti dalam pikiran.
  Contoh:
  a. 10 lebih besar dari 6.
  b. Andi belajar matematika.

- ❖ Kalimat tak berarti adalah kalimat yang tidak dapat diterima akal.
  Contoh:
  a. 5 menghormati 2.
  b. Pensil membaca majalah.

- ❖ Kalimat pernyataan / statemen / deklaratif adalah kalimat yang dapat diketahui benar atau salahnya. Benar atau salah disebut nilai kebenaran.
  Contoh:
  a. Jakarta adalah ibu kota Negara RI (B)
  b. $5 + 7 = 15$ (S)

- ❖ Kalimat bukan pernyataan adalah kalimat yang belum dapat diketahui nilai benar atau nilai salahnya. Yang termasuk dalam kalimat ini adalah kalimat terbuka, kalimat perintah, kalimat Tanya, dan kalimat harapan.
  Contoh:
  a. $2x - 5 = 7$ (kalimat terbuka)
  b. Hapuslah papan tulis itu ! (kalimat perintah)
  c. Siapa yang tidak masuk hari ini ? (kalimat tanya)
  d. Mudah-mudahan kamu lulus ujian. (kalimat harapan)

Nilai kebenaran suatu pernyatan dapat diketahui dengan dua cara, yaitu ;
a. Empiris (jika nilai kebenarannya diketahui melalui observasi)
b. Non empiris (jika nilai kebenarannya diketahui seketika)

Suatu pernyatan lazim dilambangkan dengan huruf kecil, seperti : $p, q, r, \ldots$.
Misalnya : Rini cantik dilambangkan $p$ dan Rini pandai dilambangkan $q$ maka pernyataan rini cantik dan pandai dilambangkan dengan " $p$ dan $q$ ".

Dalam logika matematika, kita jumpai beberapa operasi yang memungkinkan kita dapat menggabungkan beberapa macam pernyataan untuk memperleh pernyataan baru yang dinamakan pernyataan majemuk dengan kata : "tidak", "dan", "atau", "jika…maka…" dan seterusnya.

## Latihan 1

1. Dari kalimat-kalimat di bawah ini, manakah yang merupakan pernyatan, bukan pernyatan, dan mana yang merupakan kalimat terbuka ?
   a. Saya adalah siswa SMK.
   b. Hari sangat panjang.
   c. tolong ambilkan air minum !
   d. Setiap bilangan ganjil habis dibagi 2.
   e. Air adalah benda ekonomi.
   f. Berapa jumlah modal dalam perusahaanmu ?
   g. Diagonal layang-layang saling berpotongan tegak lurus.
   h. $2x + 15 = 10$
   i. $x^2 + 6x + 8 = 0$
   j. Jakarta ibukota Indonesia.
   k. Air beriak tanda tak dalam.
   l. Modal adalah salah satu fakto produksi.

2. Sebutkan benar atau salah !
   a. SMK merupakan sekolah kejuruan.
   b. Inti masalah ekonomi adalah kemiskinan.
   c. $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2$.
   d. 5 adalah bilangan prima.
   e. Semua bilangan prima adalah ganjil.
   f. $2 + 7 < 19$.
   g. Semua segitiga jumlah sudutnya $90^o$.
   h. $25\% = \frac{1}{4}$
   i. Harga barang akan naik jika peremintaan akan barang naik.
   j. $a^2 + b^2 = (a + b)(a – b)$
   k. Untuk $x \in R$, $x^2 \geq 0$.
   l. Jika $a > b$ maka $ac > bc$, untuk a, b, c bilangan real.

## 2 NEGASI, KONJUNGSI, DISJUNGSI, IMPLIKASI, BIIMPLIKASI

### A Negasi

Negasi disebut juga ingkaran / penyangkalan. Dari pernyataan tunggal atau majemuk dapat dibuat ingkaran atau negasinya. Negasi suatu pernyataan dapat didefinisikan sebagai berikut :
"Jika suatu pernyataan $p$ benar, maka negasinya $\sim p$ salah, sebaliknya jika pernyataan $p$ salah maka negasinya $\sim p$ benar"
Tabel kebenaran untuk Negasi.

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| B | S |
| S | B |

**Contoh:**
Tentukan negasi dari pernyataan di bawah ini !
a. Papan tulis ini warnanya hitam.
b. 2 x 5 = 10.

**Jawab:**
a. Papan tulis ini warnanya bukan hitam.
b. 2 x 5 $\neq$ 10

**Ingkaran dari Kalimat berkuantor**

Kuantor adalah imbuhan di depan suatu kalimat terbuka yang dapat mengubah kalimat terbuka itu menjadi suatu pernyataan.
Ada dua macam kuantor, yaitu :
*1) Kuantor Universal (Kuantor Umum)*
Lambang : "$\forall$" dibaca "semua" atau "untuk setiap".
Contoh:
$(\forall x)(\ x^2 \geq 0,\ x \in \mathrm{R})$
dibaca "untuk setiap $x$ bilangan real berlaku $x^2 \geq 0$" dan nilai kebenarannya : B.
*2) Kuantor Eksistensial (Kuantor khusus)*
Lambang : "$\exists$" dibaca "ada beberapa" atau "beberapa" atau "terdapat".
Ada beberapa minimalnya 1 (satu).
Contoh:
$(\exists x)(x^2 + 2x + 2 = 0,\ x \in \mathrm{R})$
dibaca "Beberapa $x$ bilangan real berlaku $x^2 + 2x + 2 = 0$" dan nilai kebenarannya : S

Jika $x$ menyatakan orang/benda dan $P(x)$ menyatakan pekerjaan atau sifat orang / benda tersebut, maka berlaku hokum pengingkaran sebagai berikut :

$$\sim (\forall x,\ P(x)) \equiv \exists x,\ \sim P(x)$$
$$\sim (\exists x,\ P(x)) \equiv \forall x,\ \sim P(x)$$

**Contoh:**
Tentukan ingkaran dari :
a. Semua orang di sini sedang belajar.
b. Ada beberapa orang di sini sedang melamun.

**Jawab:**
a. Beberapa orang di sini tidak sedang belajar.
b. Semua orang di sini tidak sedang melamun.

## B Konjungsi

Dari pernyataan $p$ dan pernyataan $q$, dapat dibuat pernyataan baru dengan cara menggabungkan kedua pernyataan tersebut memakai kata penghubung "dan", berbentuk " *p dan q*".
" *p dan q*" dilambangkan "$p \wedge q$"
*Definisi:*
Jika $p$ dan $q$ kedua-duanya merupakan pernyataan yang benar maka $p \wedge q$ merupakan pernyataan yang benar, jika tidak demikian maka $p \wedge q$ salah.
Tabel kebenaran untuk Konjungsi.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| B | B | B |
| B | S | S |
| S | B | S |
| S | S | S |

**Contoh:**

a) Jakarta ada di pulau Jawa dan 3 + 2 = 5. ($B \wedge B =$ **B**)
b) Jakarta ada di pulau Jawa dan 3 + 2 = 6. ($B \wedge S =$ **S**)
c) Jakarta ada di pulau Bali dan 3 + 2 = 5. ($S \wedge B =$ **S**)
d) Jakarta ada di pulau Bali dan 3 + 2 = 6. ($S \wedge S =$ **S**)

**Contoh:**

Tentukan $x$ agar pernyataan "$2x - 5 = 7$ dan 13 bilangan prima" bernilai benar !

**Jawab:**

$p$: $2x - 5 = 7 \rightarrow 2x = 7 + 5$

$2x = 12$

$x = 6$

$q$: 13 bilangan prima adalah pernyatan bernilai benar.
Agar $p \wedge q$ bernilai benar, haruslah $p$ benar dan $q$ benar.
$q$ bernilai benar, jadi $p$ juga harus bernilai benar.
Jadi $x = 6$.

## C Disjungsi

Dari pernyataan $p$ dan pernyataan $q$, dapat dibuat pernyataan baru dengan cara menggabungkan kedua pernyataan tersebut memakai kata penghubung "atau", berbentuk " *p atau q*".

" *p atau q*" dilambangkan "$p \vee q$"

*Definisi:*
Sebuah pernyataan disjungsi akan bernilai salah jika krdua pernyataan bernilai salah, jika tidak demikian maka $p \vee q$ benar.
Tabel kebenaran untuk Disjungsi.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| **B** | B | B |
| **B** | S | B |
| **S** | B | B |
| **S** | S | S |

**Contoh:**

a) Jakarta ada di pulau Jawa atau 3 + 2 = 5. ($B \vee B =$ **B**)
b) Jakarta ada di pulau Jawa atau 3 + 2 = 6. ($B \vee S =$ **B**)
c) Jakarta ada di pulau Bali atau 3 + 2 = 5. ($S \vee B =$ **B**)
d) Jakarta ada di pulau Bali atau 3 + 2 = 6. ($S \vee S =$ **S**)

**Contoh:**

Tentukan $x$ agar pernyataan "$x^2 - 2x - 3 = 0$, $x \in R$ atau $\sqrt{2}$ bukan bilangan real" bernilai salah!

**Jawab:**

$p$: $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x \in R \rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1 \vee x = 3$

$q$: pernyataan "$\sqrt{2}$ bukan bilangan real" bernilai salah sebab $\sqrt{2} \in R$.
Agar $p \vee q$ bernilai salah, haruslah $p$ salah dan $q$ juga salah.
Terdapat nilai $q$ salah, jadi $p$ juga harus bernilai salah.
Nilai-nilai $x$ dari $p$ yang salah adalah $x \neq -1$ atau $x \neq 3$.

*Catatan:*
Disjungsi ada dua jenis, yaitu :
1) Disjungsi inklusif yang dilambangkan dengan "$\vee$"
   Disjungsi ini seperti yang telah kita pelajari di atas.
2) Disjungsi eksklusif yang dilambangkan dengan "$\underline{\vee}$"

Batasan dari disjungsi eksklusif adalah jika $p$ dan $q$ dua pernyataan maka $p \veebar q$ benar jika salah satu benar atau salah satu salah, sebaliknya $p \veebar q$ salah jika keduanya benar atau keduanya salah.
Tabel kebenaran untuk Disjungsi eksklusif.

| $p$ | $q$ | $p \veebar q$ |
|---|---|---|
| **B** | B | S |
| **B** | S | B |
| **S** | B | B |
| **S** | S | S |

**Contoh:**
$p$ : Rini naik sepeda motor.
$q$ : Rini naik bus.
$p \veebar q$ ; Rini naik sepeda motor atau naik bus.
Dalam hal tersebut , Rini hanya naik sepeda motor saja atau hanya naik bus saja, tidak mungkin naik sepeda motor dan bus bersama-sama.

## D Implikasi

Implikasi disebut juga Kondisional. Dari dua pernyataan $p$ dan $q$ dapat dibentuk pernyataan baru dengan menggunakan kata penghubung "jika … maka …" atau "jika $p$ maka $q$"
" jika *p maka q*" dilambangkan "$p \to q$"
$p$ disebut hipotesa / antesenden / sebab, $q$ disebut konklusi / konsekuen / akibat.
*Definisi:*
Implikasi dari $p$ dan $q$ yang ditulis $p \to q$ akan bernilai salah jika $p$ benar dan $q$ salah, jika tidak demikian $p \to q$ bernilai benar.
Tabel kebenaran untuk Implikasi.

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| **B** | B | B |
| **B** | S | S |
| **S** | B | B |
| **S** | S | B |

**Contoh:**
a) Jika 2 x 5 = 10 maka 10 : 5 = 2. (B → B = **B**)
b) Jika 2 x 5 = 10 maka 10 : 5 = 4. (B → S = **S**)
c) Jika 2 x 5 = 20 maka 10 : 5 = 2. (S → B = **B**)
d) Jika 2 x 5 = 20 maka 10 : 5 = 4. (S → S = **B**)

**Contoh:**
$p$ : Ali rajin belajar.
$q$ : Ali naik kelas.
$p \to q$ : Jika Ali rajin belajar maka Ali naik kelas.

**Contoh:**
Tentukan harga $x$ agar implikasi "Jika $2x - 4 = 8$ maka 9 bilangan prima" merupakan pernyataan yang bernilai benar !

**Jawab:**
$p$ : $2x - 4 = 8$ maka $x = 6$. (B)
$q$ : 9 bilangan prima. (S)
Supaya $p \to q$ benar , maka $x \neq 6$.

## E Biimplikasi

Biimplikasi disebut juga Bikondisional. Dari dua pernyataan $p$ dan $q$ dapat dibentuk pernyataan baru "$p$ jika dan hanya jika $q$"

"$p$ jika dan hanya jika $q$" dilambangkan "$p \leftrightarrow q$"

$p \leftrightarrow q$ berarti $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

*Definisi:*

Sebuah biimplikasi bernilai benar jika hipotesa dan konklusi keduanya bernilai sama (benar semua atau salah semua), jika tidak demikian maka pernyataan $p \leftrightarrow q$ bernilai salah.

Tabel kebenaran untuk Biimplikasi.

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| **B** | B | B |
| **B** | S | S |
| **S** | B | S |
| **S** | S | B |

**Contoh:**

a) 4 x 5 = 20 jika dan hanya jika 20 : 4 = 5. (B $\leftrightarrow$ B = **B**)
b) 4 x 5 = 20 jika dan hanya jika 20 : 4 = 8. (B $\leftrightarrow$ S = **S**)
c) 4 x 5 = 9 jika dan hanya jika 20 : 4 = 5. (S $\leftrightarrow$ B = **S**)
d) 4 x 5 = 9 jika dan hanya jika 20 : 4 = 8. (S $\leftrightarrow$ S = **B**)

**Contoh:**

Tentukan harga $x$ agar biimplikasi "$x^2 + 3x - 4 = 0$ jika dan hanya jika $x^2 \leq 0$, $x \in$ R" bernilai benar!

**Jawab:**

$p$ : $x^2 + 3x - 4 = 0$, $x \in$ R diperoleh $x = -4$ dan $x = 1$. (B)
$q$ : $x^2 \leq 0$, $x \in$ R. (S)
Supaya $p \leftrightarrow q$ benar , haruslah $p$ salah.
Jadi, $x \neq -4$ dan $x \neq 1$.

## F Tabel Kebenaran

Membuat tabel kebenaran kebenaran dari suatu pernyataan majemuk.

**Contoh:**

Buat tabel kebenaran dari :

a) $p \rightarrow \sim p \wedge q$     b) $(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee r)$

**Jawab:**

a) $p \rightarrow \sim p \wedge q$

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim p \wedge q$ | $p \rightarrow \sim p \wedge q$ |
|---|---|---|---|---|
| **B** | B | S | S | S |
| **B** | S | S | S | S |
| **S** | B | B | B | B |
| **S** | S | B | S | B |

b) $(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee r)$

| $p$ | $q$ | $r$ | $\sim p$ | $\sim p \wedge q$ | $p \vee r$ | $(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **B** | B | B | S | S | B | S |
| **B** | B | S | S | S | B | S |
| **B** | S | B | S | S | B | S |
| **B** | S | S | S | S | B | S |
| **S** | B | B | B | B | B | B |
| **S** | B | S | B | B | S | S |
| **S** | S | B | B | S | B | S |
| **S** | S | S | B | S | S | B |

## G. Pernyataan Majemuk yang Ekuivalen

Dua pernyataan majemuk disebut ekuivalen jika kedua pernyataan itu mempunyai nilai kebenaran yang sama, ditulis $P_{(p,\ q,\ \ldots)} \equiv Q_{(p,\ q,\ \ldots)}$.
( "≡ " dibaca ekuivalen )

**Contoh:**
Tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa : $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ !

**Jawab:**

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \vee q$ | $\sim(p \vee q)$ | $\sim p \wedge \sim q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **B** | B | S | S | B | S | S |
| **B** | S | S | B | B | S | S |
| **S** | B | B | S | B | S | S |
| **S** | S | B | B | S | B | B |

Jadi, $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$.

**Contoh:**
Apakah $(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv (p \leftrightarrow q)$ ?

**Jawab:**

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $q \to p$ | $(p \to q) \wedge (q \to p)$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **B** | B | B | B | B | B |
| **B** | S | S | B | S | S |
| **S** | B | B | S | S | S |
| **S** | S | B | B | B | B |

Jadi, $(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv (p \leftrightarrow q)$.

Pernyataan-pernyataan majemuk yang ekuivalen satu sama lainnya akan menjadi hukum-hukum dalam logika setelah dibuktikan kebenarannya dengan tabel kebenaran. Jika dalam tabel tersebut nilai kebenarannya selalu benar maka disebut *Tautologi*. Apabila ada sebuah saja yang bernilai salah maka hukum tersebut tidak sah / tidak valid. Sebaliknya apabila ternyata semua nilainya salah maka disebut *Kontradiksi*.

Hukum – hukum logika :

1. Hukum komutatif : a. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   b. $p \vee q \equiv q \vee p$
2. Hukum asosiatif : a. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
   b. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. Hukum distributif : a. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   b. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. $p \vee q \equiv \sim p \to q$

**Contoh:**
Dalam kehidupan masyarakat sehari-hari sering kita jumpai semboyan/petuah/ancamam, misalnya:

(i) "Merokok atau sehat!"
(ii) "Mau belajar atau menjadi penganggur nanti!"
(iii) "Berikan harta atau nyawamu melayang!"

**Jawab:**
Karena $p \vee q \equiv \sim p \to q$, maka :

(i) sama artinya dengan "Jika Anda tidak merokok maka Anda bakal sehat"
(ii) sama artinya dengan "Jika kamu tidak mau belajar maka nanti menjadi penganggur"
(iii) sama artinya dengan "Jika kamu tidak memberikan harta maka nyawamu akan melayang"

## H. Negasi dari Pernyataan Majemuk

1. Hukum De Morgan : a. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   b. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
2. $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
3. $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \sim q \equiv \sim p \leftrightarrow q$

**Contoh:**
Tentukan ingkaran dari :
a) Ia rajin dan hemat.
b) Ia rajin atau ia hemat.
c) Jika ia rajin maka ia berhasil.

**Jawab:**
a) Ia tidak rajin atau ia tidak hemat.
b) Ia tidak rajin dan tidak hemat.
c) Ia rajin dan (tetapi) ia tidak berhasil.

### Latihan 2

1. Tentukan negasi dari pernyataan di bawah ini !
   a. Semua manusia akan mati.
   b. 5 adalah bilangan ganjil.
   c. Tidak ada murid yang tidak lulus.
   d. Beberapa guru mengikuti pelatihan.
   e. Besi mencair jika dipanaskan dalam suhu tertentu.
   f. Ada bilangan prima yang genap.
   g. 10 + 5 = 15

2. Buat konjungsi dari pernyatan berikut!
   a. p : Hari hujan
   q : Hari mendung
   b. p : Atap rumah pendek
   q : Udara panas
   c. p : 3 + 5 = 15
   q : 15 bilangan ganjil

3. Tentukan x agar konjungsi berikut benar !
   a. $2x - 5 = 7$ dan 13 bilangan prima.
   b. Gradien $y - 5x = 10$ adalah 5 dan $2x - 3 = 11$.

4. Buatlah disjungsi dari pernyatan berikut !
   a. p : $x = 5$
   q : $x^2 = 25$
   b. p : $2x + 5 = 1$
   q : 6 bilangan prima
   c. p : Bali ada di Lombok
   q : Bali ibu kota provinsi

5. Tentukan harga $x$ agar disjungsi berikut menjadi benar !
   a. $5x + 2 = 11$ atau 2 bukan bilangan prima.
   b. ${}^2\log 16 = 4$ atau $x^2 - 4 = 0$.

6. Di antara implikasi berikut, manakah yang benar ?
   a. Jika aliran listrik berhenti maka lampu padam.
   b. Jika 3 bilangan prima maka 3 + 3 = 6.

7. Tentukan nilai kebenaran biimplikasi berikut !
   a. $x^2 = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.
   b. $x^2 - 4x - 12 = 0$ jika dan hanya jika $x = 6$ atau $x = -2$.
   c. Rudi mekanik jika dan hanya jika Rudi sopir.

8. Lengkapilah tabel kebenaran berikut ini !

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ | $\sim(p \wedge q)$ | $\sim(p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **B** | B | … | … | … | … | … | … | … | … |
| **B** | S | … | … | … | … | … | … | … | … |
| **S** | B | … | … | … | … | … | … | … | … |
| **S** | S | … | … | … | … | … | … | … | … |

9. Buktikan pernyataan-pernyataan berikut merupakan tautologi !
   a. $p \vee \sim p$  b. $p \vee q \vee \sim p$  c. $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

10. Buktikan pernyataan-pernyataan berikut merupakan kontradiksi !
   a. $p \wedge \sim p$  b. $p \wedge q \wedge \sim p$  c. $(\sim p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow q)$

11. Dengan menggunakan hukum $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$, sebutkan pernyataan yang ekuivalen dengan :
   a. Berusahalah sekuat mungkin atau masa depanmu suram!
   b. Jika semua siswa rajin belajar maka guru senang.

12. Tentukan negasi dari ;
   a. Ibukota Amerika adalah Washington dan $5 + 2 < 8$.
   b. 4 atau 5 adalah pembagi dari 60.
   c. Jika $4 \times 7 = 11$ maka $5 + 4 = 20$.

## 3 INVERS, KONVERS, KONTRAPOSISI

Berdasarkan implikasi $p \rightarrow q$ dapat diturunkan pernyataan – pernyataan baru yang disebut Konvers, Invers, dan Kontraposisi.

| | |
|---|---|
| Implikasi | : $p \rightarrow q$ |
| Konvers | : $q \rightarrow p$ |
| Invers | : $\sim p \rightarrow \sim q$ |
| Kontraposisi | : $\sim q \rightarrow \sim p$ |

**Contoh:**
Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari :
"Jika Andi naik kelas, maka ia diberi hadiah"

**Jawab:**
Konvers : Jika Andi diberi hadiah, maka ia naik kelas.
Invvers : Jika Andi tidak naik kelas, maka ia tidak diberi hadiah.
Kontraposisi : Jika Andi tidak diberi hadiah, maka ia tidak naik kelas.

Hubungan konvers, invers, dan kontraposisi dapat ditunjukkan dengan tabel kebenaran berikut :

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $\sim p \rightarrow \sim q$ | $\sim q \rightarrow \sim p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **B** | B | S | S | B | B | B | B |
| **B** | S | S | B | S | B | B | S |
| **S** | B | B | S | B | S | S | B |
| **S** | S | B | B | B | B | B | B |

Dari tabel kebenaran di atas :

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$
$$q \rightarrow p \equiv \sim p \rightarrow \sim q$$

**Latihan 3**

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi-implikasi berikut ini !

1. Jika harga turun maka permintaan bertambah.
2. Jika hari hujan maka langit mendung.
3. Jika x = 2, maka $x^2 = 4$.
4. Jika $x^2 = 16$, maka x = 2 dan x = -2.
5. Jika 5 bilangan ganjil maka 5 + 5 bilangan genap.
6. Jika pajak naik maka devisa Negara naik.
7. Jika laba naik maka karyawan gembira.
8. jika Ahmad kaya maka Ahmad pengusaha.
9. Jika ia haji naka ia islam.
10. Jika Jakarta ada di Pulau Jawa, maka Medan ada di Sumatra.

## 4 PENARIKAN KESIMPULAN

### A Bukti dalam Matematika

Sebuah pernyataan yang telah diketahui nilai kebenarannya dapat dibuktikan dengan dua cara sebagai berikut.

***1. Bukti Langsung***

Bukti langsung adalah pembuktian berdasarkan pada pernyataan yang secara umum bernilai benar.

**Contoh:**

Jika $x, y \in$ R, buktikan bahwa : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ !

**Jawab:**

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= (x - y)(x - y)\\ &= x(x - y) - y(x - y)\\ &= x^2 - xy - xy + y^2\\ &= x^2 - 2xy + y^2 \text{ (terbukti)}\end{aligned}$$

***2. Bukti tak langsung***

Bukti tak langsung adalah membuktikan bahwa negasi (ingkaran) dari sebuah pernyataan bernilai salah, akibatnya pernyataan pasti bernilai benar.

**Contoh:**

Buktikan jika $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ maka $x \leq 1$ atau $x \geq 5$ !

**Jawab:**

Diketahui $x^2 - 6x + 5 \geq 0$.
Andaikan $1 < x < 5$, apakah memenuhi $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ ?
Ambil $x = 2$, diperoleh $2^2 - 6.2 + 5 = 4 - 12 + 5 = -3 \leq 0$.
Timbul kontradiksi dengan yang diketahui.
Pengandaian diingkar, jadi pernyataan terbukti benar.

### B Penarikan Kesimpulan

Pernyataan implikasi beserta komponen – komponen penbentuknya, yaitu hipotesis dan konklusi, dapat digunakan untuk melakukan penarikan suatu kesimpulan. Pada penarikan kesimpulan, terlebih dahulu perlu diketahui satu atau beberapa pernyataan yang diketahui bernilai benar dan pernyataan terakhir sebagai konklusi atau kesimpulan. Pernyatan – pernyataan tersebut masing – masing disebut sebagai “*premis*”, sedangkan kumpulan semua premis disebut sebagai “*argumen*”.

Jika konjungsi dari premis-premis berimplikasi konklusi, argumentasi itu dapat dikatakan *berlaku* atau *sah*. Sebaliknya, kalau konjungsi dari premis-premis tidak berimplikasi konklusi maka argumen itu dikatakan *tidak sah*. Jadi, suatu argumentasi dikatakan sah kalau premis-premisnya bernilai benar maka konklusinya juga benar. Beberapa pembuktian langsung yang dianggap sah/valid antara lain : *modus ponens*, *modus tollens*, dan *silogisme*.

***1. Modus Ponens***

Cara penarikan kesimpulan dengan modus ponens (kaidah pengasingan) yaitu menuliskan premis-premisnya baris demi baris dari atas ke bawah, kemudian dibubuhi garis mendatar sebagai pembatas premis-premis dengan kesimpulan/konklusi.

Modus ponens dinyatakan dalam bentuk :

Premis 1 : $p \rightarrow q$ (B)
Premis 2 : $p$ (B)
Konklusi : $q$ (B)

Dalam bentuk simbol, penarikan kesimpulan dengan modus ponens dapat ditulis sebagai berikut : $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

**Contoh :**
Premis 1 : Jika Diana rajin belajar maka ia akan lulus ujian.
Premis 2 : Diana rajin belajar.
Konklusi : Diana akan lulus ujian.

**Contoh :**
Premis 1 : Jika 10 habis dibagi 2 maka 10 bilangan genap.
Premis 2 : 10 habis dibagi 2.
Konklusi : 10 bilangan genap.

***2. Modus Tollens***

Cara penarikan kesimpulan dengan modus ponens (kaidah penolakan akibat) yaitu dari premis-premis $p \rightarrow q$ dan $\sim q$ dapat diturunkan konklusi $\sim p$.

Modus tollens dinyatakan dalam bentuk :

Premis 1 : $p \rightarrow q$ (B)
Premis 2 : $\sim q$ (B)
Konklusi : $\sim p$ (B)

Dalam bentuk simbol, penarikan kesimpulan dengan modus ponens dapat ditulis sebagai berikut : $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

**Contoh :**
Premis 1 : Jika hari hujan maka langit mendung.
Premis 2 : Langit tudak mendung.
Konklusi : Hari tidak hujan.

**Contoh :**
Premis 1 : Jika ABCD sebuah belah ketupat maka AC $\perp$ BD.
Premis 2 : AC tidak tegak lurus BD.
Konklusi : ABCD bukan belah ketupat.

***3. Silogisme***

Cara penarikan kesimpulan dengan silogisme yaitu dari premis $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow r$ dapat ditarik konklusi $p \rightarrow r$. Kaidah silogisme menggunakan sifat transitif dari implikasi.

Silogisme dinyatakan dalam bentuk :

Premis 1 : $p \rightarrow q$ (B)
Premis 2 : $q \rightarrow r$ (B)
Konklusi : $p \rightarrow r$ (B)

Dalam bentuk simbol, penarikan kesimpulan dengan modus ponens dapat ditulis sebagai berikut : $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

**Contoh :**
Premis 1 : Jika saya lulus maka saya bekerja.
Premis 2 : Jika saya bekerja maka saya dapat uang.
Konklusi : Jika saya lulus maka saya dapat uang.

**Contoh :**
Premis 1 : Jika $n$ bilangan ganjil maka $n^2$ bilangan ganjil.
Premis 2 : Jika $n^2$ bilangan ganjil maka $n^2 + 1$ bilangan genap
Konklusi : Jika $n$ bilangan ganjil maka $n^2 + 1$ bilangan genap.

## Latihan 4

1. Periksalah sah atau tidaknya argumentasi berikut, kemudian sebutkan prinsip kesimpulan yang digunakan !
   a. $P_1$ : Jika Ardi rajin belajar maka Ardi naik kelas.
      $P_2$ : Ardi rajin belajar.
      K : Ardi naik kelas
   b. $P_1$ : Jika ada gula maka ada semut.
      $P_2$ : Tidak ada semut.
      K : Tidak ada gula.
   c. $P_1$ : Jika $x^2 - 4x + 3 = 0$ maka $(x - 1)(x - 3) = 0$.
      $P_2$ : Jika $(x - 1)(x - 3) = 0$ maka $x = 1$ atau $x = 3$.
      K : Jika $x^2 - 4x + 3 = 0$ maka x = 1 atau $x = 3$.
   d. $P_1$ : Setiap hari Minggu pengunjung toko banyak sekali.
      $P_2$ : Pengunjung toko sepi.
      K : Hari ini bukan hari Minggu.
   e. $P_1$ : Setiap perokok tidak sehat.
      $P_2$ : Tono tidak sehat.
      K : Tono perokok.
   f. $P_1$ : Jika Polan pencuri maka Polan dihukum.
      $P_2$ : Jika Polan dihukum maka ia menderita.
      K : Jika Polan pencuri maka ia menderita.
   g. $P_1$ : Jika harga BBM naik maka harga barang naik.
      $P_2$ : Harga barang naik.
      K : Harga BBM naik.
   h. $P_1$ : Setiap kambing berjenggot.
      $P_2$ : Polan berjenggot.
      K : Polan kambing.

2. Buatlah konklusi dari premis-premis di bawah ini !
   a. $P_1$ : Jika Herman pengusaha maka ia berdasi.
      $P_2$ : Herman pengusaha.
   b. $P_1$ : Jika Arman kaya maka Arman bahagia.
      $P_2$ : Arman tidak bahagia.
   c. $P_1$ : Jika n bilangan ali maka $2n$ bilangan asli genap.
      $P_2$ : Jika 2n bilangan asli genap maka $2n + 1$ bilangan ganjil.
   d. $P_1$ : Jika ia guru maka ia mengajar.
      $P_2$ : Ia tidak mengajar.
   e. $P_1$ : Jika Ega pegawai negeri maka ia mendapat gaji bulanan.
      $P_2$ : Ega seorang pegawai negeri.
   f. $P_1$ : Jika omzet penjualan meningkat maka gaji karyawan naik.
      $P_2$ : Jika gaji karyawan naik maka Sutisna jadi nikah.