Menghitung peluang suatu kejadian

A. Ruang Sampel, Titik Sampel, dan Kejadian

Dari pandangan intuitif, peluang terjadinya suatu peristiwa atau kejadian adalah nilai yang menunjukkan seberapa besar kemungkinan peristiwa itu akan terjadi. Misalnya, peluang yang rendah menunjukkan kemungkinan terjadinya peristiwa itu sangat kecil.Konsep peluang berhubungan dengan pengertian eksperimen yang menghasilkan “hasil” yang tidak pasti. Artinya eksperimen yang diulang-ulang dalam kondisi yang sama akan memberikan “hasil” yang dapat berbeda-beda. Istilah eksperimen yang kita gunakan disini tidak terbatas pada eksperimen dalam laboratorium. Melainkan, eksperimen kita artikan sebagai prosedur yang dijalankan pada kondisi tertentu, dimana kondisi itu dapat diulang-ulang beberapa kali pada kondisi yang sama, dan setelah prosedur itu selesai berbagai hasil dapat diamati.

Himpunan S dari semua hasil yang mungkin dari suatu eksperimen yang diberikan disebut ruang sampel. Suatu hasil yang khusus, yaitu suatu elemen dalam S, disebut suatu titik sampel. Suatu kejadian A adalah suatu himpunan bagian dari ruang sampel S. kejadian { a } yang terdiri atas suatu titik sampel tunggal $a \in S$ disebut suatu kejadian yang elementer (sederhana). Notasi yang biasa digunakan adalah sebagai berikut.

Untuk ruang sampel: S.

Untuk kejadian huruf-huruf capital, seperti : A, B, …, X, Y, Z.

Untuk titik sampel, huruf-huruf kecil, seperti a, b, …, y, z atau dengan : a1, a2, …x1, x2, …, xn …

Contoh :

1. Eksperimen : Melambungkan sebuah dadu satu kali dan dilihat banyaknya mata dadu yang tampak/muncul (yang di atas).
   Ruang sampel : Dadu mempunyai 6 sisi, dan masing-masing sisi bermata satu, dua, tiga, empat,lima dan enam. Himpunan semua hasil yang mungkin dari lambungan tersebut adalah : {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
   Jadi ruang sampelnya : S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
   Titik sampel : Titik sampel merupakan suatu elemen dari ruang sampel S.
   elemen-elemen dari S adalah : 1, 2, 3, 4, 5, 6. jadi titik sampelnya : 1 atau 2 atau 3 atau 4 atau 5 atau 6.
   Kejadian : Kejadian merupakan himpunan bagian dari ruang sampel.
   Misalkan:
   A = kejadian bahwa muncul mata genap
   B = kejadian bahwa muncul mata ganjil
   C = kejadian bahwa muncul mata prima
   Maka:
   A = {2, 4, 6} ; B = {1, 3, 5} ; C = {2, 3, 5}
   Kejadian yang elementer/sederhana adalah kejadian yang terdiri atas satu titik sampel.
   Misalkan:
   D = kejadian bahwa muncul mata prima yang genap. Maka D = {2}
2. Eksperimen : Melambungkan sebuah mata uang tiga kali dan dilihat deretan dari sisi muka (M) dan sisi belakang (B) yang tampak.
   Ruang sampel : Satu mata uang dilambungkan tiga kali. Maka kemungkinan sisi yang tampak adalah : MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB, BBM,BBB.
   Jadi ruang sampelnya:S = {MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB, BBM, BBB}
   Titik sampel : Merupakan elemen dari ruang sampel S. jadi titik sampelnya : MMM, MMB, MBB, MBM, BMM, BMB, BBM, BBB.
   Kejadian : Merupakan himpunan bagian dari ruang sampel S.
   Misalkan :
   A = kejadian muncul 2 sisi M atau lebih
   B = kejadian bahwa ketiga lambungan menghasilkan sisi yang sama
   Maka :
   A = {MMM, MMB, MBM, BMM}
   B = {MMM, BBB}.
   Kejadian yang elementer/sederhana adalah kejadian yang terdiri atas satu titik sampel.
   Misalkan C = kejadian bahwa dari tiga lambungan muncul sisi M semua.
   Maka C = { MMM }

Kita dapat mengkombinasikan kejadian-kejadian untuk membentuk kejadian-kejadian baru dengan menggunakan berbagai operasi himpunan.

Definisi

1) $A \cup B$ merupakan kejadian/peristiwa yang terjadi jika kejadian A terjadi atau B terjadi atau keduanya terjadi
2) $A \cap B$ merupakan kejadian yang terjadi jika A terjadi dan B terjadi
3) A^c, yaitu komplemen dari A, adalah kejadian yang terjadi jika A tidak terjadi.

Contoh:

Kita lihat kembali contoh 1.

Eksperimen : melambungkan sebuah dadu dan diperhatikan jumlah mata yang tampak/muncul (pada sisi yang terletak di atas).

Ruang sampel S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

B = kejadian tampak/ muncul mata ganjil = {1, 3, 5}

C = kejadian tampak/muncul mata prima = {2, 3, 5}

Maka : Jika P kejadian tampak/muncul ganjil atau prima, P = $B \cup C$ = {1, 2, 3, 5}

Jika Q kejadian tampak/muncul mata ganjil dan prima,Q = $B \cap C$ ={3, 5}

Jika R kejadian bahwa mata prima tidak tampak/muncul, maka R = C^C = $\{2, 3, 5\}^c$ = {1, 4, 6}

B. Peluang Suatu Kejadian

Jika ruang sampel S mempunyai anggota yang berhingga banyaknya dan setiap titik sampel mempunyai kesempatan untuk muncul yang sama, dan A suatu kejadian munculnya percobaan tersebut, maka peluang kejadian A dinyatakan dengan :

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

dengan : P(A) = Peluang muncul A
n(A) = banyaknya kejadian A
n(S) = banyaknya kemungkinan kejadian S

Contoh**:**

1. Sebuah mata uang logam dilempar satu kali. Berapa peluang munculnya “Angka” ?
   Jawab:
   Ruang sampel S = {A, G} maka n(S) = 2.
   Kejadian A = {A}, maka n(A) = 1
   Jadi, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$
2. Sebuah dadu mata enam dilempar satu kali. Berapa peluang munculnya mata dadu ganjil ?
   Jawab:
   S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\rightarrow$ n(S) = 6
   A = {1, 3, 5} $\rightarrow$ n(A) = 3
   Jadi, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
3. Dalam setumpuk kartu bridge (remi) diambil satu kartu secara random (acak). Tentukan peluang yang terambil adalah kartu As !
   Jawab:
   Banyaknya kartu bridge adalah 52, berarti n(S) = 52
   n(As) = 4
   Jadi, $P(As) = \frac{n(As)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Kepastian dan Kemustahilan

Peluang suatu kejadian mempunyai nilai $0 \leq P \leq 1$, artinya : jika P = 0 maka kejadian dari suatu peristiwa adalah mustahil atau tidak pernah terjadi, dan jika P = 1 maka suatu peristiwa pasti terjadi.

Komplemen dari Suatu kejadian

Jika A^C menyatakan komplemen dari kejadian A, maka : $\boxed{P(A^C) = 1 - P(A)}$

Contoh:

Misalkan dilakukan pengundian dua uang logam Rp 100,00 sekaligus, berapa peluang tidak diperolehnya “Angka 100” ?

Jawab:

S = {GG, GA, AG, AA} $\rightarrow$ n(S) = 4

M = kejadian munculnya “angka 100” = {GA, AG, AA} $\rightarrow$ n(M) = 3

$P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

M^C = kejadian munculnya bukan “angka 100”

$P(M^C) = 1 - P(M) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Frekuensi Harapan (Fh)

Frekuensi harapan suatu kejadian pada suatu percbaan adalah hasil kali peluang dengan frekuensi percobaan A, dinyatakan dengan rumus :

$$\boxed{F_h(A) = P(A) \times n}$$

Contoh:

1. Sebuah dadu mata enam dilantunkan sebanyak 360 kali. Berapakah frekuensi harapan munculnya mata dadu prima ?

   Jawab:

   S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\rightarrow$ n(S) = 6

   A = {2, 3, 5} $\rightarrow$ n(A) = 3

   $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   Jadi, $F_h(A) = P(A) \times n$

   $= \frac{1}{2} \times 360$

   = 180 kali.

2. Berapakah frekuensi harapan muncul mata kurang dari 5 dalam pelantunan dadu mata enam sebanyak 36 kali ?

   Jawab:

   S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\rightarrow$ n(S) = 6

   A = {1, 2, 3, 4} $\rightarrow$ n(A) = 4

   $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

   Jadi, $F_h(A) = P(A) \times n$

   $= \frac{2}{3} \times 36$

   = 24 kali

C. Kejadian Majemuk

1. Peluang Kejadian yang Saling Lepas

Dua kejadian disebut saling lepas jika irisan dari dua kejadian itu merupakan himpunan kosong. Himpunan A dan B dikatakan dua kejadian yang saling lepas, sebab $A \cap B = \emptyset$.

Berdasarkan teori himpunan :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Karena $P(A \cap B) = 0$, maka :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Contoh :

1. Sebuah dadu bermata enam dilantunkan satu kali. Berapa peluang munculnya mata dadu ganjil atau mata dadu genap ?

   Jawab:

A = {1, 3, 5} $\rightarrow$ n(A) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B = {2, 4, 6} $\rightarrow$ n(B) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \varnothing$

P $(A \cup B)$ = P(A) + P(B) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

2. Dua dadu mata enam dilempar bersama-sama. Berapa peluang muncul dua mata dadu yang jumlahnya 3 atau 10 ?

   Jawab:

   2 dadu dilempar $\rightarrow$ n(S) = 36

   A = jumlah mata dadu 3 = {(1,2),(2,1)} $\rightarrow$ n(A) = 2

   B = jumlah mata dadu 10 = {(4,6),(5,5),(6,4)} $\rightarrow$ n(B) = 3

   $A \cap B = \varnothing$

   P $(A \cup B)$ = P(A) + P(B) = $\frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{5}{36}$

2. Kejadian Saling Bebas (Stokastik)

Jika dua keeping mata uang yang homogen dilantunkan bersama-sama, maka kejadian yang mungkin adalah : S = $\{(G_1,G_2), (G_1,A_2), (A_1,G_2), (A_1,A_2)\}$ $\rightarrow$ n(s) = 4.

Pada kejadian mata uang pertama muncul G_1 dan mata uang kedua muncul G_2, maka $P(G_1) = \frac{1}{2}$ dan $P(G_2) = \frac{1}{2}$. Kejadian G_1 dan G_2 adalah dua kejadian yang saling bebas.

$P(G_1,G_2) = P(G_1 \cap G_2) = P(G_1) \text{ x } P(G_2) = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Secara umum, jika A dan B merupakan dua kejadian yang saling bebas maka peluang kejadian A dan B adalah :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \text{ x } P(B)}$$

Contoh :

1. Dua buah dadu bermata enam, yang terdiri atas warna merah dan putih, dittos bersama-sama satu kali. Berapa peluang munculnya mata lebih dari 4 untuk dadu merah dan kurang dari 3 untuk dadu putih ?

   Jawab:

   Jika A kejadian muncul mata > 4, maka n(A) = 2

   P(A) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

   Jika B kejadian muncul mata < 3, maka n(B) = 2

   P(B) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

   Jadi, $P(A \cap B)$ = P(A) x P(B)

   $= \frac{1}{3} x \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

2. Dalam sebuah kantong terdapat sepuluh kelereng yang terdiri dari 6 kelereng merah dan 4 kelereng putih, diambil dua kelereng. Berapa peluang terambilnya kedua-duanya kelereng putih ?

   Jawab**:**

   Jika A kejadian terambilnya kelereng putih pada pengambilan pertama maka P(A) = $\frac{4}{10}$.

   Jika B kejadian terambilnya kelereng putih pada pengambilan kedua maka P(B) = $\frac{3}{9}$.

   Jadi, $P(A \cap B)$ = P(A) x P(B)

   $= \frac{4}{10} \text{ x } \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$

3. Dari setumpuk kartu bridge, diambil satu kartu secara berturut-turut sebanyak dua kali. Tentukan peluang bahwa yang terambil pertama As dan yang terambil berikutnya King !
   Jawab:
   n(S) = 52
   n(As) = 4 → P(As) = $\frac{n(As)}{n(S)} = \frac{4}{52}$
   n(K) = 4 → P(K) = $\frac{n(K)}{n(S)} = \frac{4}{51}$
   Jadi, P(As ∩ K) = P(As) x P(K)
   $= \frac{4}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{16}{2652} = \frac{4}{663}$
4. Dalam sebuah kantong terdapat sepuluh kabel yang terdiri dari 6 kabel merah dan 4 kabel putih, diambil dua kabel. Berapa peluang terambilnya kedua-duanya kabel putih ?
   Jawab:
   Jika A kejadian terambilnya kabel putih pada pengambilan pertama maka P(A) = $\frac{4}{10}$.
   Jika B kejadian terambilnya kabel putih pada pengambilan kedua maka P(B) = $\frac{3}{9}$.
   Jadi, P(A ∩ B) = P(A) x P(B)
   $= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$

Tes Formatif
1. Dari seperangkat kartu bridge diambil sebuah kartu secara acak. Tentukan peluang terambilnya kartu As?
2. Dalam kotak berisi 4 bola merah, 5 bola kuning, dan 6 bola hijau. Diambil 3 bola sekaligus, tentukan peluang bahwa ketiga bola yang terambil 2 merah dan 1 kuning?
3. Seseorang mengikuti seleksi suatu perusahaan harus menempuh 4 kali tes. Peluang ia lulus tes pertama, kedua, ketiga dan keempat berturut-turut adalah 2/3, 3/5, 1/3 dan ¼. Berapa peluang ia lulus tes pertama, kedua ketiga dan gagal pada tes keempat?
4. Dua dadu dilempar satu kali, maka peluang muncul mata dadu berjumlah 10 atau 11 adalah …..
5. Dua buah dadu dilempar 120 x. Berapa frekuensi harapan yang muncul jumlah kedua mata dadu ganjil ?

Kunci Jawaban
1. Kartu brige berjumlah 52 kartu, n(S) = 52
   Diambil kartu As, n(A) = 4
   Peluang kejadian p(A) = n(A)/n(S) = 4/52 = 1/13
2. Bola merah, n(m)=4
   Bola kuning, n(k)=5
   Bola hijau, n(h)=6
   Total bola ada 15 bola
   Kejadian terambil 2 bola merah dan 1 bola kuning,
   n(A)= $C_2^4 \text{x}\, C_1^5 = \frac{4!}{(4-2)!.2!} \text{x} \frac{5!}{(5-1)!.1!} = \frac{4.3.2.1}{2.1\ .2.1} \text{x} \frac{5.4.3.2.1}{4.3.2.1\ .1} = 6 \text{ x } 5 = 30$
   Banyak ruang sampel n(S) = $C_3^{15} = \frac{15!}{(15-3)!.3!} = \frac{15.14.13.12!}{12!\ .\ 3.2.1} = 455$
   Jadi peluang terambil kejadian p(A) = n(A)/n(S)=30/455=6/91
3. Peluang lulus pada tes pertama = p(I) = 2/3
   Peluang lulus pada tes ke2 = p(II) = 3/5
   Peluang lulus pada tes ke3 = p(III) = 1/3
   Peluang lulus pada tes ke4 = p(IV) = ¼
   maka peluang gagal pada tes ke4 = $p(IV)^c$ = 1 – p(IV) = 1 – ¼ = 3/4
   sehingga peluang dia lulus tes pertama, kedua, ketiga dan gagal di tes keempat adalah
   p(I) x p(II) x p(III) x $p(IV)^c$ = 2/3 x 3/5 x 1/3 x ¾ = 1/10

4. Dua dadu dilempar sekali, n(S)= 6 x 6 = 36
   Kejadian jumlah mata dadu 10 = {(4,6),(5,5),(6,4)}, n(A) = 3
   Kejadian jumlah mata dadu 11 = {(5,6),(6,5)}, n(B) = 2
   Peluang muncul kejadian A atau B adalah
   = p(A) + p(B) = 3/36 + 2/36 = 5/36
5. Dua buah dadu, n(S) = 36
   Dilempar 120x = k
   Kejadian muncul jumlah mata dadu ganjil = {(1,2), (2,1),(1,4), (2,3), (3,2),(4,1),(1,6),(2,5),(3,4),(5,2),(6,1),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(5,6),(6,5)}, n(A)= 18
   Frekuensi harapan A = p(A) x k = 18/36 x 120 = 60 kali